代数幾何学シンポジウム記録
1978年度 pp.56-63

Fricke path について

名大・理　寺西鎮男

最近、D. H. Hejhal は、compact Riemann 面上の、k-正則微分 $f(z)(dz)^k$ が zero になる条件を、Fricke path と呼ばれるものを用いて、あらわす事を試みた。しかし、彼は、$k \leqq 6$ と言う条件を付けているので、この Note では、古典的な、不変式論を用いて、条件 $k \leqq 6$ を、取り除く事を試みる。

今、M を genus $\geqq 2$ の compact Riemann 面とする。その時、M の基本群 $\pi_1(M)$ は、$2g$ 個の元、

$$\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \cdots, \alpha_g, \beta_g$$

で生成され、commutator relation

$$[\alpha_1, \beta_1], \cdots [\alpha_g, \beta_g] = 1$$

を満足する。

良く、知られている様に、M の genus g が 2 以上の時は、compact Riemann 面は、上半平面 H を、ある、$SL(2, \mathbb{C})$ の discrete subgroup Γ で割ったものとして、実現できるので、以下では、M と H/Γ とを、同一視する。

今、$\hat{\chi}$ を、$\mathrm{Hom}(\Gamma, SL(n, \mathbb{C}))$ の元として、上半平面上の、一次独立な、正則関数の n 個の組を

$$\varphi(z) = \begin{pmatrix} \varphi_1(z) \\ \vdots \\ \varphi_n(z) \end{pmatrix}$$

とする。$\varphi(z)$ が、Γ の任意の元 $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、

$$\varphi\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \hat{\chi}(\sigma)\,\varphi(z)\,(cz+d)^{1-n}, \qquad \hat{\chi}(\sigma) \in SL(n, \mathbb{C})$$

と言う、変換を受ける時、$\varphi(z)$ を、zeta-Fuchs 関数と言う。

今、$\varphi(z)$ を、一組の基本解として持つ、n 階の線型微分方程式、

$$\begin{vmatrix} y & \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ y' & \varphi_1' & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y^{(n)} & \varphi_1^{(n)} & & \varphi_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

を、

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n y + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} P_\ell(z) \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-\ell} y = 0$$

の形に、書いておくと、$\hat{\chi}(\sigma)$が、$SL(n, \mathbb{C})$の元である事から、容易に、$P_1(z)=0$となる事がわかるから、$\varphi(z)$の微分方程式は、

$$L_n(p|z, y) = \left(\frac{d}{dz}\right)^n y + \sum_{\ell=2}^{n} \binom{n}{\ell} P_\ell(z) \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-\ell} y = 0$$

と書ける。

さて、天下り式であるが、$\varphi(z)$に対して、$n-1$個の、正則関数、$\theta_2(z), \theta_3(z), \cdots \theta_n(z)$を次の様に定義する。

定義 1. $\varphi(z)$の微分方程式、$L_n(p|z, y)=0$に対くて、$n-1$個の関数、$\theta_2(z), \cdots \theta_n(z)$を、

$$\theta_m(z) = \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{m-2} (-1)^\ell \frac{(m-2)!\, m!\, (2m-\ell-2)!}{(m-\ell-1)!\, (m-\ell)!\, (2m-3)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^\ell P_{m-\ell}(z)$$

と、定義する。

定理 1. H/Γの、k-正則微分全体のなす、ベクトル空間を、$S_k(\Gamma)$と現わす時、

$$\varphi(z) \text{が zeta-Fuchs 関数} \iff \theta_m(z)(dz)^m \in S_m(\Gamma)$$

$$(2 \leq m \leq n)$$

$S_m(\Gamma)_{\mathbb{R}}$ の basis を、$\{\cdots, g_{m,\alpha}(z), \cdots\}$ を取れば、定理1によって、

$$\theta_m(z)\,(dz)^m = \sum_{\alpha} \lambda_{m,\alpha} \cdot g_{m,\alpha}(z)$$

と書けるが、$\{\cdots \lambda_{m,\alpha} \cdots\}$ を accessory parameters と呼ぶ事にする。

定義 2. n 個の関数の組、$A_{m,\alpha}(z)$ を、

$$A_{m,\alpha}(z) = \sum_{\ell=m}^{n} \binom{n}{\ell} \frac{(\ell-1)!}{(m-1)!} \frac{(2m-1)!}{(m+\ell-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-\ell} \varphi(z) \cdot \left(\frac{d}{dz}\right)^{\ell-m} g_{m,\alpha}(z)$$

によって、定義する。

定理 2. Γ の任意の元 $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、$A_{m,\alpha}(z)$ は、次の変換を受ける。

$$A_{m,\alpha}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \hat{\chi}(\sigma)\, A_{m,\alpha}(z)\,(cz+d)^{n+1}$$

$$(2 \le m \le n)$$

次に、accessory parameters $\{\cdots \lambda_{m,\alpha} \cdots\}$ を、なめらかに動かす時、定理1によって、zeta-Fuchs 関数 $\varphi(z)$ や、$\hat{\chi}(\sigma)$ も、なめらかに変換されるが、それらの variational formula を求める。

行列，

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(z) & \cdots\cdots, & \varphi_n(z) \\ \varphi_1'(z) & \cdots\cdots & \varphi_n'(z) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(z) & & \varphi_n^{(n-1)}(z) \end{pmatrix}^{-1}$$

の n 番目の行からなる，横ベクトルを，$W(z)$ とする。

さて，zeta-Fuchs 関数 $\varphi(z)$ と，$\varphi(z)$ に対応する $n-1$ 個の正則微分 $\theta_2(z)(dz)^2, \ldots, \theta_n(z)(dz)^n$ に対して，正則微分，$\theta_m(z)(dz)^m + \sum_\alpha \lambda_{m,\alpha} \cdot g_{m,\alpha}(z)$ （$2 \leq m \leq n$）に対応する，zeta-Fuchs 関数を，$\varphi(z, \lambda)$（$\lambda = \{\cdots \lambda_{m,\alpha} \cdots\}_{2\leq m\leq n}$）と書き，それに対応する，monodoromy 準同型を，$\hat{\chi}(\sigma, \lambda)$ と書く事にする。

<u>定理</u> 3．次の variational formula が成り立つ．

$$\text{(i)} \quad \left(\frac{\partial \varphi(z,\lambda)}{\partial \lambda_{m,\alpha}}\right)_{\lambda=0} = -\int_{z_0}^{z} A_{m,\alpha}(z)\, W(z)\, dz \cdot \varphi(z)$$

$$\text{(ii)} \quad \left(\frac{\partial \hat{\chi}(\sigma,\lambda)}{\partial \lambda_{m,\alpha}}\right)_{\lambda=0} = -\int_{z_0}^{az_0+b/cz_0+d} A_{m,\alpha}(z)\, W(z)\, dz \cdot \hat{\chi}(\sigma)$$

２つの、たてベクトル $X(z)$, $Y(z)$ を、

$$X(z) = \left(z^{n-1-\alpha}\right), \quad Y(z) = \left((-1)^{\alpha}\binom{n-1}{\alpha}z^{\alpha}\right)$$

$$0 \leq \alpha \leq n-1$$

とし、$M(z) = X(z)\,{}^tY(z)$ と定義する。

$SL(2,\mathbb{C})$ の任意の元 $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、

$$X(\sigma\cdot z)\,(cz+d)^{n-1} = \chi(\sigma)\,X(z)$$

$$\exists\, \sigma \in \mathrm{Hom}\,(SL(2,\mathbb{C}),\ SL(n,\mathbb{C}))$$

従って、$X(z)$ は zeta-Fuchsian であり、対応する微分方程式は、$\left(\frac{d}{dz}\right)^n y = 0$ である。

次に、$\varphi(z) = X(z)$ に対して、定理３を、適用する。この時、$W(z) = \frac{1}{(n-1)!}Y(z)$ となる。

<u>定義３.</u>　$\varphi(z) = X(z)$, $\sigma \in \Gamma$ に対して、

$$I[g_{m,\alpha},\sigma] = Tr\left(\int_{z_0}^{\frac{az_0+b}{cz_0+d}} A_{m,\alpha}(z)\,{}^tY(z)\,dz \cdot \chi(\sigma)\right)$$

と定義する。（但し、$Tr(\ )$ は、$n \times n$ 行列、

$\int_{z_0}^{\sigma z_0} A_{m,\alpha}(z)\,{}^tY(z)\,dz \cdot \chi(\sigma)$ の trace を現わす）

$\mathrm{Hom}\,(\Gamma, SL(n,\mathbb{C}))$ には、$SL(n,\mathbb{C})$ が、内部自己同型として、自然に作用しているから、$\mathrm{Hom}(\Gamma, SL(n,\mathbb{C}))$ の、$SL(n,\mathbb{C})$ による、quotient を $\mathrm{Hom}(\Gamma, SL(n,\mathbb{C}))/SL(n,\mathbb{C})$

で表わす。$V = \mathrm{Hom}(\Gamma, SL(n,\mathbb{C}))/SL(n,\mathbb{C})$ には、複素多様体の構造が入り、その複素次元は、$2(n^2-1)(g-1)$ である事が知られている。一方、Riemann-Roch の定理により、

$$\dim_{\mathbb{R}}\left(\bigoplus_{m=2}^{n} S_m(\Gamma)\right) = 2(n^2-1)(g-1)$$

であるので、

$$\dim_{\mathbb{C}} V = \dim\left(\bigoplus_{m=2}^{n} S_m(\Gamma)\right)$$

となる事に、注意する。

さて、Γ の任意の元 σ は、V の任意の元 $[\hat{\chi}]$（$[\hat{\chi}]$ は、$\hat{\chi}$ の $SL(n,\mathbb{C})$ による代表類）に対して $\mathrm{Tr}(\hat{\chi}(\sigma))$ を対応させる事により、V 上の関数と見なせる。$X(z)$ に対応する、V の元、$[\chi]$ で V は、正則である事が、知られているので、次の定義をする。$r = \dim V$ とおく。

<u>定義</u>4　Γ の r 個の元 $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_r\}$ を、V 上の関数と見た時、V の点、$[\chi]$ のある近傍の局所座標となっている時、$\{\sigma_1, \cdots, \sigma_r\}$ を、Fricke paths と言う。

ベクトル空間 $\bigoplus_{m=2}^{n} S_m(\Gamma)$ から $g_1(z) \cdots g_r(z)$ を、取り、Γ からも r 個の元、$\sigma_1, \cdots, \sigma_r$ を取って

次の行列式Jを考える。

$$J = \det\left[\ \mathrm{Im}\cdot I(g_i, \sigma_j)\ \right]_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le j \le r}}$$

（但し、Imはimaginary partをあらわす）

定理3を用いて、次の定理が証明できる。

定理4　$J \neq 0$ の時、次の(a), (b)が成り立つ。

(a). $\{g_1, \cdots, g_r\}$ は、$\bigoplus_{m=2}^{n} S_m(\Gamma)$ のbasisである。

(b) $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_r\}$ は、Fricke pathsである。

定理5　$\{g_1, \cdots, g_r\}$ が、$\bigoplus_{m=2}^{n} S_m(\Gamma)$ のbasisの時、

$J \neq 0 \iff \{\sigma_1, \cdots \sigma_r\}$ はFricke paths.

References

1. D.A. Hejhal. Monodoromy groups and Poincare series. Bull. Amer. Math. Soc. 1978.

2. 森川寿. 不変式論. 紀国屋.

3. R. Gunning. Lectures on vector bundles over Riemann surfaces. Princeton.